ISTITUTO TECNICO
TRASPORTI E LOGISTICA
MARIO CILIBERTO

NUMERI COMPLESSI

Appunti

Autore
Sergio SIMONE

Autore
Luigi FLOTTA

Indice

Capitolo 1

Numeri complessi

1.1 Forma algebrica

Sono della forma

$$a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{dove}$$

1) a parte reale;

2) ib parte immaginaria;

3) b coefficiente dell'immaginario;

4) $i^2 = -1$;

5) $a^2 + b^2$ norma;

6) $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ modulo.

1.1.1 Somma di due numeri complessi

$$x = a + ib, \quad y = c + id$$

$$x + y = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è un gruppo commutativo rispetto all'addizione.

1.1.2 Differenza di due numeri complessi

$$x = a + ib, \quad y = c + id$$

$$x - y = (a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - ib) = (a - c) + i(b - d)$$

1.1.3 Prodotto di due numeri complessi

$$x = a + ib, \quad y = c + id$$

$$x \cdot y = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

1) $(a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$, norma;

2) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo.

1.1.4 Quoziente di due numeri complessi

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = (a+ib) \cdot \frac{c-id}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

1.1.5 Proprietà sui coniugati

$$z = a + ib \implies \overline{z} = a - ib, \text{ coniugato di } z.$$

1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

2) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$

3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Osservazione 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo. Difatti:

1) $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo abeliano;

2) $(\mathbb{C}, \cdot)$ è un gruppo abeliano;

3) Il prodotto $\cdot$ è distributivo rispetto alla somma $+$

Osservazione 1.2. Il reciproco del numero complesso $a + ib$ diverso dallo zero complesso è il numero

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

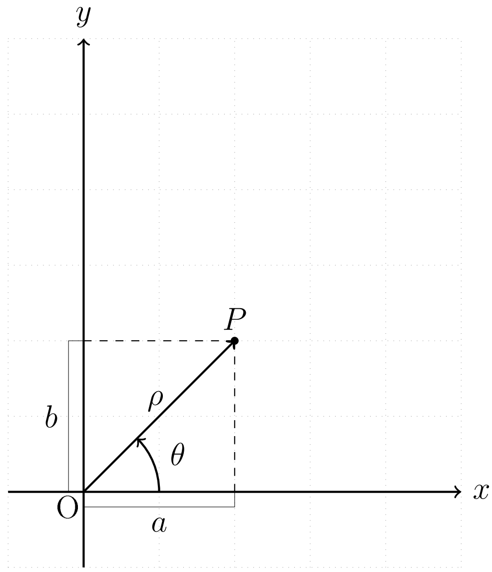

Figura 1.1: Forma trigonometrica di un numero complesso

1.2 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali O_{xy}, indichiamo con l'origine O il **polo** del sistema polare, con il semiasse positivo delle x l'**asse polare** e stabiliamo che il verso positivo sia quello antiorario, come mostrato in figura.

Si ha:

$P = (a,\ b) = (\rho,\ \theta)$ con $\rho \geq 0$ e $\rho = \overline{OP}$ *modulo*; θ *anomalia* o *argomento*

Quindi, dalla figura:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Sostituendo in $a + ib$ si ottiene

$$z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Il numero

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

è la forma trigonometrica del numero complesso $a+ib$, dove

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

Osservazione 1.3. Il modulo ρ è ben determinato, mentre l'anomalia θ è determinata a meno di multipli di 2π. Prendendo θ in modo che sia

$$-\pi < \theta < \pi$$

ve ne è solo **una**.
In ogni caso, per scrivere un numero complesso in forma trigonometrica, occorre determinare il suo modulo ρ e una **determinazione qualunque** del suo argomento θ.

Osservazione 1.4.

$$a \text{ reale} \quad \Longrightarrow \begin{cases} a = |a|(\cos 0 + i\sin 0) & \text{se } a > 0 \\ a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi) & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$ib \quad \Longrightarrow \begin{cases} b = |b|\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } b > 0 \\ b = |b|\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right) & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

$$0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 0(\cos\theta + i\sin\theta)$$

1.2.1 Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

Siano

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \; w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Si ha:

$$zw = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho r[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]$$

Sul piano di ARGAND-GAUSS, si ha quanto riportato nella figura 1.2.

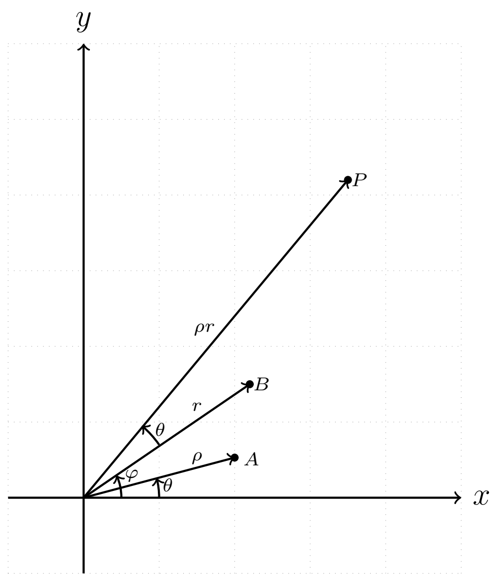

Figura 1.2: Prodotto di sue numeri complessi in forma trigonometrica

1.2.2 Reciproco di un numero complesso non nullo in forma trigonometrica

Da $z = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$ si ricava

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left[\cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)\right] = \frac{1}{\rho}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

1.2.3 Quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica, il secondo dei quali non nullo

Siano $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Allora,

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} = \frac{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\\ &= \frac{\rho}{r}[(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos -\varphi + i\sin\varphi)]\\ &= \frac{\rho}{r}[\cos\left(\theta - \varphi\right) + i\sin\left(\theta - \varphi\right)]\end{aligned}$$

1.2.4 Potenza ad esponente intero di un numero complesso in forma trigonometrica

Vale la formula di **Moivre**:

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n \in \mathbb{N}$$

Per $m \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta]^{-m} = \rho^{-m}[\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)], \quad m \in \mathbb{Z}$$

dome $m \in \mathbb{Z}$ è un intero negativo.

Osservazione 1.5. Per cui, la formula di **Moivre** vale $\forall n \in \mathbb{Z}$, compreso $n = 0$, perchè negli ultimi due casi ($n = 0,\ n$ negativo) $a + ib \neq 0 + i0$.

1.3 Radici $n - sime$ di numeri complessi

Le radici $n - sime$ del numero complesso z diverso da zero sono **tutti e soltanto** i numeri che si deducono dalla formula

$$\sqrt[n]{z}^* = w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

con $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1$.

1.3.1 Radici $n - sime$ dell'unità

Nel caso particolare di $z = 1$, cioè, $\rho = 1$ e $\theta = 0$, si ha:

$$\sqrt[n]{1} = w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

Queste radici le indichiamo rispettivamente con

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots, \varepsilon_{n-1}$$

cioè,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$